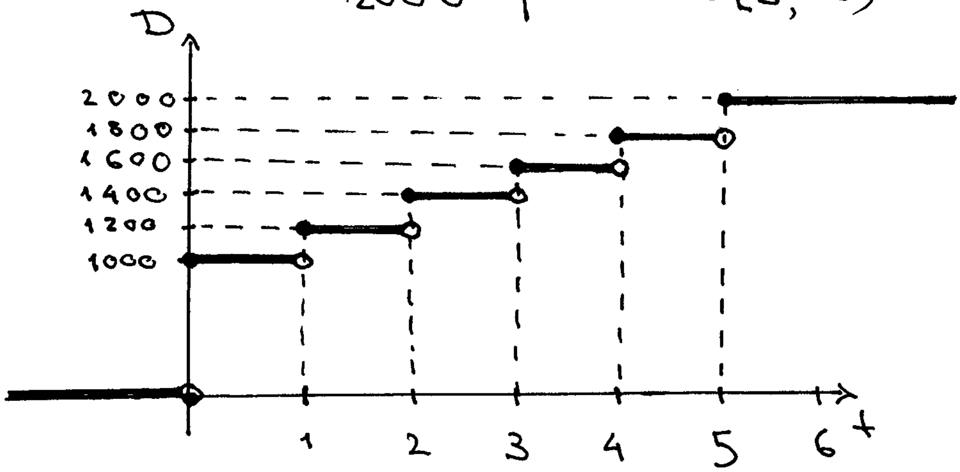
Epreuve finale MMP L3 S5 du 08/01/2010 (corrigé)

Ex. 1

1). $D(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t<0 \\ 1000 & \text{pour } t\in[0,1) \\ 1200 & \text{pour } t\in[1,2) \\ 1400 & \text{pour } t\in[2,3) \\ 1600 & \text{pour } t\in[3,4) \\ 1800 & \text{pour } t\in[4,5) \\ 2000 & \text{pour } t\in[5,\infty) \end{cases}$



2). $\langle T_D', \varphi\rangle = -\langle T_D, \varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} D(t)\,\varphi'(t)\,dt =$

$= -\int_{-\infty}^{0} 0\cdot\varphi'(t)\,dt - \int_0^1 1000\cdot\varphi'(t) - \int_1^2 1200\cdot\varphi'(t)\,dt - \int_2^3 1400\cdot\varphi'(t)\,dt$

$- \int_3^4 1600\cdot\varphi'(t)\,dt - \int_4^5 1800\cdot\varphi'(t)\,dt - \int_5^{\infty} 2000\cdot\varphi'(t)\,dt =$

$= -1000\,\varphi(t)\Big|_0^1 - 1200\,\varphi(t)\Big|_1^2 - 1400\,\varphi(t)\Big|_2^3 - 1600\,\varphi(t)\Big|_3^4$

$-1800\,\varphi(t)\Big|_4^5 - 2000\,\varphi(t)\Big|_5^{\infty} =$

$= -1000(\varphi(1)-\varphi(0)) - 1200(\varphi(2)-\varphi(1)) - 1400(\varphi(3)-\varphi(2))$

$-1600(\varphi(4)-\varphi(3)) - 1800(\varphi(5)-\varphi(4)) - 2000(\underset{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{car } \varphi\in C_0^\infty}}{\varphi(\infty)} - \varphi(5)) =$

$= 1000\,\varphi(0) + 200\,\varphi(1) + 200\,\varphi(2) + 200\,\varphi(3) + 200\,\varphi(4) + 200\,\varphi(5) =$

$= \langle 1000\,\delta_0 + 200\,\delta_1 + 200\,\delta_2 + 200\,\delta_3 + 200\,\delta_4 + 200\,\delta_5, \varphi\rangle$

Donc

$(T_D)' = 1000\,\delta_0 + 200\,\delta_1 + 200\,\delta_2 + 200\,\delta_3 + 200\,\delta_4 + 200\,\delta_5$

versement initial

versements mensuels

<u>Interprétation</u> : $(T_D)'$ représente la vitesse de l'augmentation des dépôts. Ceux-ci augmentent de façon "instantanée" $\Rightarrow$ distributions δ.
Le coefficient de chaque δ_j correspond au montant du versement.

3). Si on pose une somme fixe sur ce compte, et on n'effectue aucun versement après, alors le montant total M de l'épargne (= versement initial + intérêts) vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dM}{dt} = \lambda M \qquad (1)$$

qui exprime le fait que la vitesse de l'augmentation de M est proportionnelle à M. La solution de (1) est

$$M(t) = M_0 \, e^{\lambda(t-t_0)}$$

où $M_0 = M(t_0)$. Ceci permet de déterminer λ, car

nombre de mois dans 1 an

$$\underbrace{M(12)}_{\text{épargne dans 1 an}} = \underbrace{M(0)}_{\text{versement initial}} \cdot e^{12\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{12} \ln \frac{M(12)}{M(0)} = \frac{1}{12} \ln 1{,}03$$

car 3% annuels

Donc

$$M(t) = M_0 \, e^{\frac{t-t_0}{12} \ln 1{,}03}$$

Dans notre cas, 1000 euros ont été déposé pour 6 mois, 200 pour 5 mois, encore 200 pour 4 mois, etc ---- et encore 200 pour 1 mois. Donc le montant des intérêts est

$$1000\left(e^{\frac{6}{12}\ln 1{,}03} - 1\right) + 200\left(e^{\frac{5}{12}\ln 1{,}03} - 1\right) + 200\left(e^{\frac{4}{12}\ln 1{,}03} - 1\right)$$
$$+ 200\left(e^{\frac{3}{12}\ln 1{,}03} - 1\right) + 200\left(e^{\frac{2}{12}\ln 1{,}03} - 1\right) + 200\left(e^{\frac{1}{12}\ln 1{,}03} - 1\right) \approx$$

≈ 22 € 31 c

4). la vitesse d'augmentation de l'épargne = la vitesse liée aux intérêts + la vitesse liée aux dépôts

ce qui permet d'écrire

$$\frac{dE}{dt} = \lambda E + (T_D)' = \left(\frac{1}{12}\ln 1{,}03\right)\cdot E + 1000\,\delta_0 + \sum_{j=1}^{5} 200\,\delta_j$$

$\Downarrow$

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}002463\,E + 1000\,\delta(t) + \sum_{j=1}^{5} 200\,\delta(t-j) .$$

Ex. 2 1). $\begin{cases} y'' + 6y' + 5y = \cos x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$

$\Downarrow$

$y(x) = g_1(x) + g_2(x)$, où

$\begin{cases} g_1'' + 6g_1' + 5g_1 = 0 \\ g_1(0) = 1, \; g_1'(0) = 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} g_2'' + 6g_2' + 5g_2 = \cos x \\ g_2(0) = g_2'(0) = 0 \end{cases}$

éq. homogène, CI non-homogènes
pb soluble par les méthodes standards

éq. non-homogène, CI homogènes,
pb soluble par la méthode de la fonction de Green

1.1). Éq. caractéristique

$\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = -5,$

donc $g_1(x) = \underbrace{C}\, e^{-x} + \underbrace{D}\, e^{-5x}$

constantes à déterminer

$g_1(0) = C + D = 1$

$g_1'(x) = -Ce^{-x} - 5De^{-5x}$

$\Downarrow$

$g_1'(0) = -C - 5D = 3$

$\Longrightarrow \begin{cases} C + D = 1 \\ C + 5D = -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} C = 2 \\ D = -1 \end{matrix}$

Donc: $\boxed{g_1(x) = 2e^{-x} - e^{-5x}}$

1.2). $\begin{cases} g_2'' + 6g_2' + 5g_2 = \cos x \\ g_2(0) = g_2'(0) = 0 \end{cases}$

pb de Cauchy $\Rightarrow$ $g_2(x) = \int_0^x G(x,y)\cos y \, dy$

2 solutions indépendantes de l'équation homogène:

$$\left.\begin{array}{l} g_{2(1)}(x) = e^{-x} \\ g_{2(2)}(x) = e^{-5x} \end{array}\right\} \Rightarrow W(g_{2(1)}, g_{2(2)}) = g_{2(1)} g'_{2(2)} - g'_{2(1)} g_{2(2)} =$$

$$= e^{-x}(-5)e^{-5x} - e^{-5x}(-1)e^{-x} = -4e^{-6x}$$

$$G(x,y) = -\frac{g_{2(1)}(x)\, g_{2(2)}(y) - g_{2(2)}(x)\, g_{2(1)}(y)}{W(g_{2(1)}(y), g_{2(2)}(y))} =$$

$$= -\frac{e^{-x}e^{-5y} - e^{-5x}\cdot e^{-y}}{-4e^{-6y}} = +\frac{1}{4}\left(e^{-x+y} - e^{-5x+5y}\right)$$

d'où

$$g_2(x) = \int_0^x \left(+\frac{1}{4}\right)\left(e^{-x+y} - e^{-5x+5y}\right)\cos y \, dy =$$

$$= +\frac{1}{4}e^{-x}\underbrace{\int_0^x e^y \cos y \, dy}_{I_1} - \frac{1}{4}e^{-5x}\underbrace{\int_0^x e^{5y}\cos y \, dy}_{I_2}$$

Calculons I_1 et I_2:

$$\int e^y \cos y \, dy = \int e^y \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} dy = \int \frac{e^{(1+i)y} + e^{(1-i)y}}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(1+i)y}}{1+i} + \frac{e^{(1-i)y}}{1-i}\right) = \frac{e^y}{2}\left(\frac{\cos y + i\sin y}{1+i} + \frac{\cos y - i\sin y}{1-i}\right)$$

$$= \frac{e^y}{2} \cdot \frac{\cos y + \sin y + \cancel{i(\sin y - \cos y)} + \cos y + \sin y - \cancel{i(\sin y - \cos y)}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^y(\cos y + \sin y)$$

$$\int e^{5y}\cos y \, dy = \int \frac{e^{(5+i)y} + e^{(5-i)y}}{2} dy = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{(5+i)y}}{5+i} + \frac{e^{(5-i)y}}{5-i}\right) =$$

$$= \frac{e^{5y}}{2}\left(\frac{\cos y + i\sin y}{5+i} + \frac{\cos y - i\sin y}{5-i}\right) =$$

$$= \frac{e^{5y}}{2} \; \frac{2(5\cos y + \sin y)}{26} = \frac{1}{26}e^{5y}(5\cos y + \sin y)$$

Donc:

$$I_1 = \frac{1}{2} e^{y}(\cos y + \sin y)\Big|_0^x = \frac{1}{2} e^{x}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}$$

$$I_2 = \frac{1}{26} e^{5y}(5\cos y + \sin y)\Big|_0^x = \frac{1}{26} e^{5x}(5\cos x + \sin x) - \frac{5}{26}$$

ce qui implique

$$g_2(x) = \frac{1}{4} e^{-x}\left\{\frac{1}{2} e^{+x}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{2}\right\}$$

$$- \frac{1}{4} e^{-5x}\left\{\frac{1}{26} e^{5x}(5\cos x + \sin x) - \frac{5}{26}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{8} e^{-x} + \frac{5}{104} e^{-5x} + \frac{1}{8}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{104}(5\cos x + \sin x) =$$

$$= -\frac{1}{8} e^{-x} + \frac{5}{104} e^{-5x} + \frac{1}{13}\cos x + \frac{3}{26}\sin x$$

Finalement:

$$y(x) = g_1(x) + g_2(x) = 2e^{-x} - e^{-5x} - \frac{1}{8} e^{-x} + \frac{5}{104} e^{-5x} + \frac{1}{13}\cos x + \frac{3}{26}\sin x =$$

$$= \frac{15}{8} e^{-x} - \frac{99}{104} e^{-5x} + \frac{1}{13}\cos x + \frac{3}{26}\sin x.$$

2.1). $y'' + 6y' + 5y = \cos x$

Appliquons la transformation de Laplace des 2 côtés:

$$\underbrace{TL(y'')}_{s^2F(s) - s\cdot \underset{y(0)}{1} - \underset{y'(0)}{3}} + 6\underbrace{TL(y')}_{sF(s) - \underset{y(0)}{1}} + 5\underbrace{TL(y)}_{F(s)} = \underbrace{TL(\cos x)}_{\frac{s}{s^2+1}}$$

(ici $F(s)$ note la T.L. de $y(x)$)

Donc

$$s^2F(s) - s - 3 + 6(sF(s) - 1) + 5F(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\Downarrow$$

$$(s^2 + 6s + 5)F(s) = \frac{s}{s^2+1} + s + 9$$

$$\Downarrow$$

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s^2+6s+5)} + \frac{s+9}{s^2+6s+5}$$

$$\Downarrow$$

$$y(x) = TL^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+1)(s^2+6s+5)} + \frac{s+9}{s^2+6s+5}\right)$$

Pour trouver la forme explicite de la transformée inverse, on cherche d'abord à représenter

$$\frac{s}{(s^2+1)(s^2+6s+5)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+6s+5},$$

avec A, B, C, D à déterminer. Nous avons

$$(As+B)(s^2+6s+5)+(Cs+D)(s^2+1) =$$

$$= (A+C)s^3 + (B+6A+D)s^2 + (6B+5A+C)s + (5B+D)$$

$= s \Rightarrow$ un système de 4 équations pour A, B, C, D:

$$\begin{cases} A+C=0 & \Rightarrow C=-A \\ B+6A+D=0 & \\ 5B+D=0 & \Rightarrow B=\frac{3}{2}A \Rightarrow D=-\frac{15}{2}A \\ 6B+5A+C=1 & \Rightarrow 9A+5A-A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{13} \end{cases}$$

d'où $A=\frac{1}{13}$, $B=\frac{3}{26}$, $C=-\frac{1}{13}$, $D=-\frac{15}{26}$.

Par conséquent:

$$y(x) = TL^{-1}\left(\frac{1}{13}\frac{s}{s^2+1} + \frac{3}{26}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{-\frac{1}{13}s-\frac{15}{26}}{s^2+6s+5} + \frac{s+9}{s^2+6s+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{13}\cos x + \frac{3}{26}\sin x + TL^{-1}\left(\frac{\frac{12}{13}s+\frac{219}{26}}{s^2+6s+5}\right)$$

Ensuite on cherche $\tilde{A}, \tilde{B}$ tels que

$$\frac{\frac{12}{13}s+\frac{219}{26}}{s^2+6s+5} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+5} = \frac{(A+B)s+(5A+B)}{s^2+6s+5}$$

Ça donne

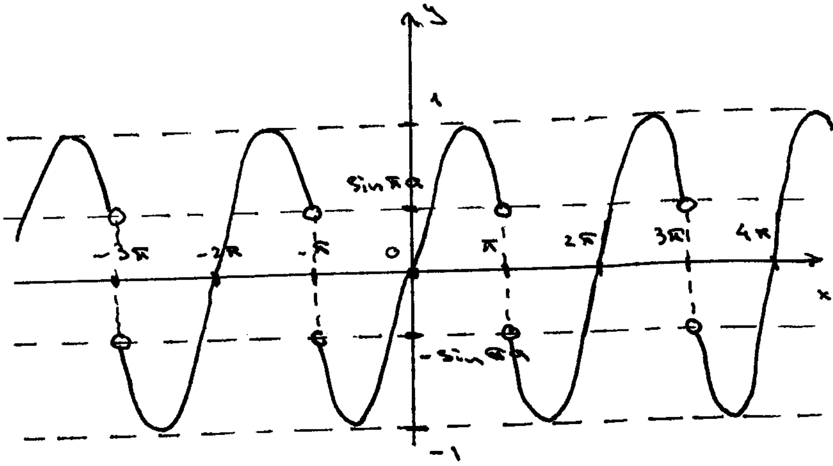
$$\begin{cases} A+B=\frac{12}{13} \\ 5A+B=\frac{219}{26} \end{cases} \Rightarrow 4A=\frac{15}{2} \Rightarrow A=\frac{15}{8} \Rightarrow B=-\frac{99}{104},$$

d'où

$$y(x) = \frac{1}{13}\cos x + \frac{3}{26}\sin x + \frac{15}{8}TL^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{99}{104}TL^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) =$$

$$= \frac{1}{13}\cos x + \frac{3}{26}\sin x + \frac{15}{8}e^{-x} - \frac{99}{104}e^{-5x}.$$

Ex. 3 $f(x) = \sin ax$
pour $x \in (-\pi, \pi)$



1). f est impaire,
donc développable en série des sinus

$$T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x \, dx =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin ax \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\cos(a-n)x - \cos(a+n)x\right] dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(a-n)x}{a-n} - \frac{\sin(a+n)x}{a+n} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(a-n)\pi}{a-n} - \frac{\sin(a+n)\pi}{a+n} \right) = \left| \begin{array}{l} \text{comme} \\ \sin(a \pm n)\pi = \\ = (-1)^n \sin \pi a \end{array} \right|$$

$$= \frac{(-1)^n \sin \pi a}{\pi} \left(\frac{1}{a-n} - \frac{1}{a+n} \right) =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot \sin \pi a}{\pi} \cdot \frac{2n}{a^2 - n^2}$$

D'où le développement :

(2) $$\text{série de F. de } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi a}{\pi} \frac{2n}{a^2 - n^2} \sin nx$$

2). Posons dans (2) $x = \pi/2$. Comme f et toutes ces dérivées ~~sont~~ continues en ce point, la série de Fourier en $x = \pi/2$ coïncide avec $f(\pi/2) = \sin \frac{\pi a}{2}$. D'où l'identité

(3) $$\sin \frac{\pi a}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin \pi a}{\pi} \frac{2n}{a^2 - n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n=2 \\ -1 & \text{si } n=3 \\ 0 & \text{si } n=4 \\ 1 & \text{si } n=5 \\ 0 & \text{si } n=6 \\ -1 & \text{si } n=7 \\ 0 & \text{si } n=8 \\ \text{---} & \text{---} \end{cases}$$

et donc plus généralement

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n=2k \\ (-1)^k & \text{si } n=2k+1 \end{cases}$$

Donc l'identité (3) s'écrit comme

$$\sin\frac{\pi a}{2} = \frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k+1}\cdot\frac{2k+1}{a^2-(2k+1)^2}(-1)^k =$$

$$= \frac{2\sin\pi a}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{a^2-(2k+1)^2},$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2k+1}{a^2-(2k+1)^2} = \frac{\pi\sin\frac{\pi a}{2}}{2\sin\pi a} = \frac{\pi\,\cancel{\sin\frac{\pi a}{2}}}{4\,\cancel{\sin\frac{\pi a}{2}}\cos\frac{\pi a}{2}} = \frac{\pi}{4\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

3). La formule de Parseval dans notre cas:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 ax\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2 ax\,dx.$$

Mais:

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\pi a}{\pi^2}\frac{4n^2}{(a^2-n^2)^2} = \frac{4\sin^2\pi a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2-n^2)^2}$$

et d'autre part

$$\int_0^{\pi}\sin^2 ax\,dx = \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2ax}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2ax}{2a}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\sin 2\pi a}{2a}\right)$$

Donc nous avons

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{4\sin^2\pi a}{\pi^{\cancel{2}}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2-n^2)^2} = \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\pi}}\left(\pi-\frac{\sin 2\pi a}{2a}\right)$$

d'où:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(a^2-n^2)^2} = \frac{\pi}{4\sin^2\pi a}\left(\pi-\frac{\sin 2\pi a}{2a}\right)$$

Ex. 4) 1). Notons

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT),$$

$$G(t) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{2\pi i k t/T}$$

On veut montrer que $F(t) = G(t)$.

Notons que $F(t)$ est manifestement T-périodique, car

$$F(t+T) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+T+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+(n+1)T) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT) = F(t)$$

Périodique $\Longrightarrow$ développable en série de Fourier :

(4) $$F(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c_m e^{2\pi i m t/T},$$

où les coefficients de Fourier $\{c_m\}$ sont donnés par

$$c_m = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\, e^{-2\pi i m t/T}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+nT)\right) e^{-2\pi i m t/T}\, dt =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^T f(t+nT)\, e^{-2\pi i m t/T}\, dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{changement de variable:} \\ t' = t+nT, \quad dt' = dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t')\, e^{-2\pi i m (t'-nT)/T}\, dt'$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t')\, e^{-2\pi i m t'/T} \cdot \underbrace{e^{2\pi i m n}}_{=1}\, dt'$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t')\, e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}\right)t'}\, dt' =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\, e^{-i\left(\frac{2\pi m}{T}\right)t'}\, dt' = \left(\text{par définition de } \hat{f}(\omega)\right)$$

$$= \frac{1}{T}\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{T}\right).$$

Donc à partir du développement de Fourier (4) on obtient

$$F(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{T}\,\hat{f}\left(\frac{2\pi m}{T}\right) e^{2\pi i m t/T} = G(t) \leftarrow \text{la formule de Poisson}$$

2). Avec $t=0$, $T=1$, la formule de Poisson se transforme en

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k)$$

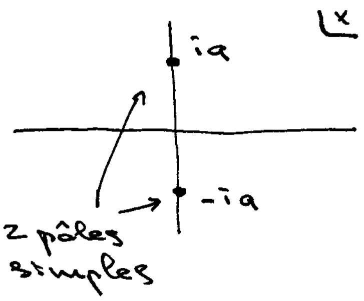
Posons $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \Longrightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2+a^2}$.

D'autre part, comme

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\omega x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x-ia)(x+ia)}\,dx = \left|\begin{array}{l}\text{d'après le thm des}\\ \text{résidus et le lemme}\\ \text{de Jordan}\end{array}\right| =$$

on suppose $a>0$ →



$$= \begin{cases} 2\pi i \operatorname*{res}_{x=ia} \dfrac{e^{-i\omega x}}{(x-ia)(x+ia)} & \text{pour } \omega \leq 0, \\[2ex] -2\pi i \operatorname*{res}_{x=-ia} \dfrac{e^{-i\omega x}}{(x-ia)(x+ia)} & \text{pour } \omega \geq 0. \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \dfrac{e^{\omega a}}{2ia} = \dfrac{\pi}{a} e^{\omega a} & \text{pour } \omega \leq 0 \\[2ex] -2\pi i \dfrac{e^{-\omega a}}{-2ia} = \dfrac{\pi}{a} e^{-\omega a} & \text{pour } \omega \geq 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{\pi}{a} e^{-|\omega| a},$$

nous avons

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\pi}{a} e^{-2\pi|k|a} = \frac{\pi}{a} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi|k|a} =$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\pi k a}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(1 + 2\left[e^{-2\pi a} + e^{-4\pi a} + e^{-6\pi a} + \dots\right]\right) =$$

$$= \frac{\pi}{a}\left(1 + 2\,\frac{e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}\right) = \frac{\pi}{a}\,\frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}} =$$

$$= \frac{\pi}{a}\,\frac{e^{\pi a}+e^{-\pi a}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}} = \frac{\pi}{a}\,\frac{2\operatorname{ch}\pi a}{2\operatorname{sh}\pi a} = \frac{\pi}{a}\coth \pi a.$$